EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par : $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F la primitive de f sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1°) On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $G(x)=F\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer $G(x)$ pour tout $x\in[0,\pi[$ puis calculer $F(0)$.

2°) Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a : $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$.

3°) Soit u la suite réelle définie sur IN par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ et $k\in\{n,n+1,.....,2n\}$ on a : $F\left(\dfrac{1}{n}\right)\le F\left(\dfrac{1}{k}\right)\le F\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

EXERCICE N°4 : 20' 4 points

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1°) Montrer que f est une bijection de $[0;\pi]$ sur $[0;\sqrt{2}]$. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f)

2°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;\sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

3°) Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ et G la primitive de g sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ qui s'annule en zéro.

a) Calculer la dérivée de la fonction $H:x\mapsto g(x)-g(-x)$. En déduire que g est paire.

b) Montrer que pour tout x $\in[0,\sqrt{2}[$; $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

EXERCICE N°5 : 15' 3 points

Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x)=x^2-5x+6$

et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn